Онлайн-обучение как средство продвижения новых экономико-математических научных направлений в учебный процесс

Шведов Алексей Сергеевич

НИУ ВШЭ, Факультет экономических наук,
Департамент прикладной экономики

Цели доклада

Обсудить

— Онлайн-обучение как средство сближения образовательных стандартов и содержания современных научных публикаций, относящихся к каждой специальности.

— Сдача онлайн-курса повышенной трудности как «зарабатывание очков» в глазах работодателей.

— Онлайн-обучение как способ поддержания «математической формы» и повышения квалификации, в том числе, для научной работы в прикладных областях.

Представить

— Идею онлайн-курса, связанного с применением методов нечеткой математики в эконометрике.

Образовательные стандарты требуют бережного и уважительного отношения. При этом всегда были предметы, которые следовало бы включить, если бы было можно по часам и по расчету нагрузки на студента.

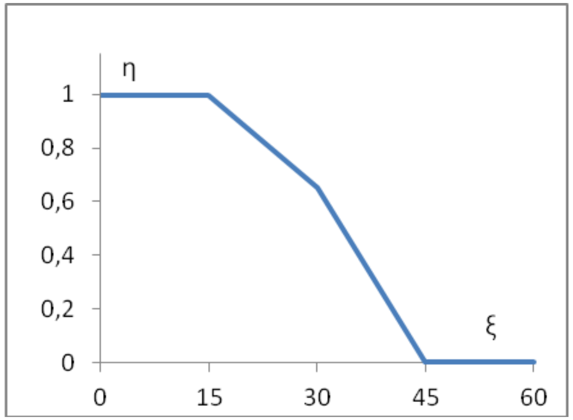
Например, дисциплина «Вычислительная математика» для специальности «Экономика» или дисциплина «Общая алгебра» для специальности «Прикладная математика».

В современной науке возникают новые подходы, в том числе, связанные с использованием нечеткой логики, новые дисциплины.

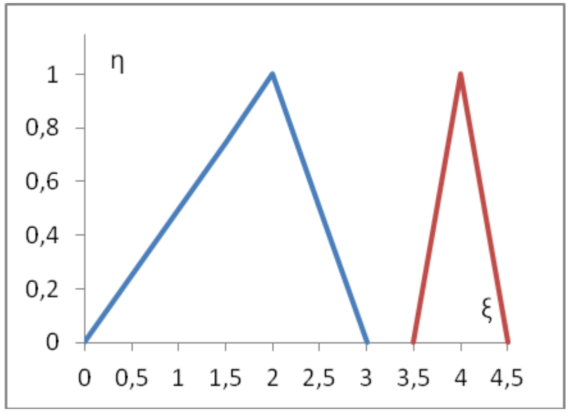
Основными подходами к включению неопределенности в математическую модель являются, во-первых, использование **теории вероятностей** и, во-вторых, использование **теории нечетких множеств**. И здесь речь идет о двух разных видах неопределенности.

При использовании теории вероятностей неизвестная величина может принимать различные значения, и с каждым значением или с каждой группой значений связывается некоторая вероятность.

При использовании теории нечетких множеств сами значения являются расплывчатыми, неопределенными.



Множество молодых людей как нечеткое множество



Примеры нечетких чисел

Для обычного множества степень принадлежности каждого элемента к этому множеству либо 0 (элемент множеству не принадлежит), либо 1 (элемент множеству принадлежит). Для нечеткого множества степень принадлежности каждого элемента к этому множеству может быть любым действительным числом от 0 до 1.

Нечеткое число $\tilde{x}$ можно определить путем задания функций $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$ (левого и правого индекса нечеткого числа $\tilde{x}$).

Zadeh (1965)
Kwakernaak (1978, 1979)
Puri, Ralescu (1986)

Lilly J.H. Fuzzy Control and Identification. Hoboken (NJ): Wiley, 2010.

Zhang H., Liu D. Fuzzy Modeling and Fuzzy Control. Boston (MA): Birkhäuser, 2006.

Фрагмент 1. Нечетко-случайные величины и моменты нечетко-случайных величин. (*Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика, т. 42, 2016, с. 121–138.)*

Фрагмент 2. Нечеткие импликации, модели нечеткого вывода Мамдани и Такаги – Сугено.

Фрагмент 3. Нечеткое математическое программирование. (*Шведов А.С. Нечеткое математическое программирование: краткий обзор // Проблемы управления, 2017, вып. 3, с. 2–10.)*

Пусть J — множество, элементами которого являются компактные множества пространства $\mathbb{R}^2$. Если $K_1, K_2 \in J$, то расстоянием Хаусдорфа между K_1 и K_2 называется наибольшее из чисел

$$\sup_{a_1 \in K_1} \inf_{a_2 \in K_2} \|a_1 - a_2\|, \qquad \sup_{a_2 \in K_2} \inf_{a_1 \in K_1} \|a_1 - a_2\|.$$

При таком определении расстояния множество J является метрическим пространством.

Через S обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств множества J, то есть наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества множества J и все замкнутые подмножества множества J.

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство; Σ — σ-алгебра, состоящая из некоторых подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера.

Как обычно, отображение из Ω в J называется измеримым, если прообраз любого множества $M \in S$ входит в σ-алгебру Σ.

<u>Определение.</u> Измеримое отображение $\tilde{X}:\Omega \to J$ называется нечетко-случайной величиной, если при любом $\omega \in \Omega$ компактное множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом.

Функции $X^L(\omega,\eta)$ и $X^R(\omega,\eta)$ называются, соответственно, левым индексом и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

<u>Теорема.</u> Пусть $\tilde{X}$ — нечетко-случайная величина. Тогда при любом $\eta_0 \in [0,1]$ функции $X^L(\omega,\eta_0)$ и $X^R(\omega,\eta_0)$ являются измеримыми функциями аргумента ω.

Ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{X}$

$$E\left(\tilde{X}\right)=0.5\int_{0}^{1}\int_{\Omega}\left(X^{L}\left(\omega,\eta\right)+X^{R}(\omega,\eta)\right)dP\,d\eta .$$

Нечеткое ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ – это нечеткое число $\tilde{x}$ с левым индексом $x^{L}\left(\eta\right)$ и с правым индексом $x^{R}\left(\eta\right)$,

$$x^{L}\left(\eta\right)=\int_{\Omega}X^{L}\left(\omega,\eta\right)dP, \qquad x^{R}\left(\eta\right)=\int_{\Omega}X^{R}\left(\omega,\eta\right)dP.$$

Ковариация нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$Cov\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)=0.25\int_{0}^{1}\int_{\Omega}\left(X^{L}\left(\omega,\eta\right)+X^{R}\left(\omega,\eta\right)-x^{L}(\eta)-x^{R}(\eta)\right)$$

$$\left(Y^{L}\left(\omega,\eta\right)+Y^{R}(\omega,\eta)-y^{L}(\eta)-y^{R}(\eta)\right)dP\,d\eta .$$

Пусть A_j^l; $l = 1,...,d$; $j = 1,...n$ – нечеткие множества, $\mu_{A_j^l}$ – функция принадлежности нечеткого множества A_j^l.

Нечеткая система Такаги – Сугено состоит из n нечетких правил следующего вида:

$$R_j: \text{ЕСЛИ } \left(x_1 = A_j^1\right) \text{ И } \ldots \text{ И } \left(x_d = A_j^d\right), \text{ ТО } y = a_j^0 + a_j^1 x_1 + ... + a_j^d x_d; \qquad j = 1,...n,$$

где $a_j^0, a_j^1, ..., a_j^d \in \mathbb{R}$. При

$$\xi_j(x) = \frac{\prod_{l=1}^{d} \mu_{A_j^l}\left(x_l\right)}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{d} \mu_{A_k^l}\left(x_l\right)}, \qquad j = 1,...n,$$

выходом является

$$y = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^0 + a_j^1 x_1 + ... + a_j^d x_d\right) \xi_j(x).$$

Классическая задача математического программирования состоит в максимизации критерия

$$f(x) \to \max$$

при ограничениях

$$g_1(x) \le b_1, \dots, g_m(x) \le b_m.$$

Здесь $x = \left(x_1, \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$; функции $f, g_1, \dots, g_m$ действуют из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ и являются известными; $b_1, \dots, b_m$ – заданные действительные числа. В области точек x, удовлетворяющих приведенным ограничениям, требуется найти точку (или точки), в которой функция f достигает максимума. В данной задаче математического программирования максимизируется один критерий. Однако может присутствовать и несколько критериев.

В задаче линейного программирования критерий $cx \to \max$ при условиях $ax \le b$, $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. Здесь $c = (c_1, ..., c_n)$ – n-мерный вектор, $b = (b_1, ..., b_m)'$ – m-мерный вектор, a – $m \times n$ матрица.

В нечетком математическом программировании рассматриваются, в частности, задачи с расплывчатыми неравенствами. Пусть g_0 – желаемый уровень для рассматриваемого критерия. В данном случае g_0 – действительное число. Требуется найти n-мерный вектор $x = (x_1, ..., x_n)'$ такой, что

$$cx \gtrsim g_0, \qquad ax \lesssim b,$$

$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. Матрица a и вектора b, c те же, что и выше.

Произвольная функция $\Re$, действующая из множества нечетких чисел в множество действительных чисел, может быть выбрана в качестве ранжирующей функции. Для нечетких чисел $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ устанавливается следующее отношение порядка: $\tilde{x} \leq_{\Re} \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\Re(\tilde{x}) \leq \Re(\tilde{y})$.

Пусть вместо условия $ax \leq b$, рассмотренного в предыдущем параграфе, требуется использовать условие с матрицей $\{\tilde{a}_{ij}\}$ и с вектором $(\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_m)'$, где $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ – нечеткие числа; координаты вектора x – действительные числа. Тогда в качестве условий можно принять

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq_{\Re} \tilde{b}_i, \qquad i = 1,\ldots,m.$$

Определение. Функция *Pos*, определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке [0,1], называется мерой возможности, если $Pos(\varnothing) = 0$ и для любых двух множеств $A \in R,\ B \in R$

$$Pos(A \cup B) = \max\left(Pos(A), Pos(B)\right).$$

Пример. Пусть непустое множество $C \in R$ и пусть для любого $A \in R$ выполняется $Pos(A) = 1$, если $A \cap C \neq \varnothing$, и $Pos(A) = 0$, если $A \cap C = \varnothing$. Этот пример объясняет и название меры. Подмножество A является возможным, если оно пересекается с подмножеством *C*, и является невозможным, если оно не пересекается с подмножеством *C*.

Пример. Для каждого множества $B \subseteq \mathbb{R}$ определяется $\sup\limits_{u \in B} \mu_\xi(u)$. Об этом значении говорят как о возможности того, что нечеткая величина ξ принадлежит множеству *B*.

Определение. Функция Nec, определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке [0,1], задаваемая формулой $Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A})$, называется мерой необходимости.

При каждом $\lambda \in [0,1]$

$$M_\lambda(A) \overset{def}{=} \lambda Pos(A) + (1-\lambda) Nec(A).$$

Если в приведенной выше задаче математического программирования присутствуют нечеткие параметры, то вместо нее может быть рассмотрена следующая задача возможностного программирования:

$$\gamma \to \max$$

при условиях

$$M_{\lambda_0}\left(f(x) \ge \gamma\right) \ge \alpha_0, \qquad M_{\lambda_j}\left(g_j(x) \le b_j\right) \ge \alpha_j,\ j = 1,\dots,m;$$

здесь $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – заданные числа.

Задания для контроля знаний предполагается разделить на следующие четыре группы.

1. Короткие вопросы, ответы на которые человеком, освоившим курс, должны даваться немедленно.

2. Вопросы по теоретическому материалу.

3. Типовые задачи по каждому из разделов онлайн-курса.

4. Более сложные задачи, приближающиеся к практическим применениям.

Благодарю за внимание.